Exercice n° 1

a) $f(x)=x^2+1 \Rightarrow f'(x)=2x>0 \quad \forall x \in]0,+\infty[$

Donc f est continue et strictement croissante sur IR_+

Par la suite f admet une fonction réciproque f^{-1}

définie sur $f([0,+\infty[)=[f(0), \lim_{+\infty} f[=[1,+\infty[=J$

b) • $f(0)=1 \Leftrightarrow f^{-1}(1)=0$

• $f^{-1}(2)=x_0 \Leftrightarrow f(x_0)=2 \Leftrightarrow x_0^2+1=2 \Leftrightarrow x_0^2=1$
$\Leftrightarrow x_0=1$ ou $x_0=-1$ comme $x_0 \in [0,+\infty[$

On aura $\boxed{f^{-1}(2)=1}$

• $f^{-1}(3)=x_0 \Leftrightarrow f(x_0)=3 \Leftrightarrow x_0^2+1=3 \Leftrightarrow x_0^2=2$
$\Leftrightarrow x_0=\sqrt{2}$ ou $x_0=-\sqrt{2}$ comme $x_0 \in [0,+\infty[$

On aura $\boxed{f^{-1}(3)=\sqrt{2}}$

c) • f et f^{-1} ont même sens de variation donc f^{-1} est strictement croissante sur J

• f est dérivable sur $[0,+\infty[$

et $f'(x)=2x\neq 0 \ \forall \ x>0$

Donc f^{-1} est dérivable sur $]1,+\infty[$

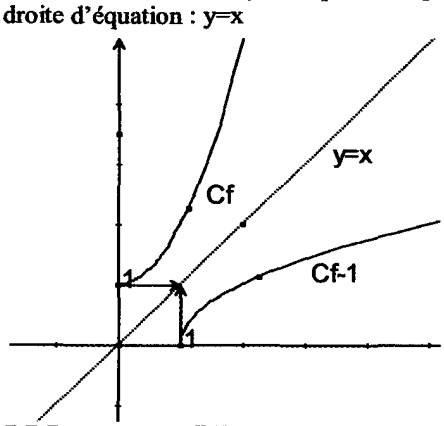
d) $x \in J, y \in [0,+\infty[$:

$f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x$, cherchons donc y :

$y^2+1=x \Leftrightarrow y^2=x-1 \Leftrightarrow y=\sqrt{x-1}$ ou bien

$y=-\sqrt{x-1}$, or $y\geq 0$ d'où $\boxed{f^{-1}(x)=\sqrt{x-1}}$

e) Cf La courbe de f est une demi-parabole admettant une demi tgte horizontale à droite au sommet S(0,1).
La courbe de f^{-1} est le symétrique de Cf par rapport à la droite d'équation : y=x



Exercice n° 2

$x \in [0,+\infty[$; $g(x)=-1+\sqrt{x}$

a) pour $x>0$, $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}>0$

g est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$

Donc g admet une fonction réciproque g^{-1}

b) $g([0,+\infty[)=[g(0), \lim_{+\infty} g[=[-1,+\infty[$

Donc g^{-1} est définie sur $J=[-1,+\infty[$

c) $x \in [-1,+\infty[$, $y \in [0,+\infty[$:

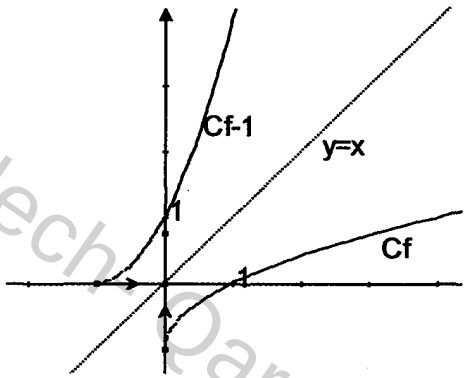
$g^{-1}(x)=y \Leftrightarrow g(y)=x$, cherchons donc y :

$-1+\sqrt{y}=x \Leftrightarrow \sqrt{y}=x+1$

$\Leftrightarrow y=(1+x)^2$

alors $\boxed{g^{-1}(x)=(1+x)^2}$

d) Cg La courbe de g est une demi-parabole admettant une demi tgte verticale au point S(0,-1).
La courbe de f^{-1} est le symétrique de Cg par rapport à la droite d'équation : y=x (Cf^{-1} admet une demi- tg horizontale à droite au point S'(-1 ;0))



Remarque : g dérivable sur $]0,+\infty[$
g^{-1} dérivable sur $[-1,+\infty[$ et $(g_d^{-1})'(-1)=0$

Exercice n° 3

● $h(x)=x-\dfrac{1}{x}$, $x>0$

h est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $h'(x)=1+\dfrac{1}{x^2}>0$

Donc h est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$
Par la suite h admet une fonction réciproque h^{-1}

définie sur $J=h(]0,+\infty[)$
$=\left]\lim_{0^+} h, \lim_{+\infty} h\right[=IR$

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn